pISSN 2746-4970, eISSN 2798-1592

RUANG TOPOLOGI BERTIPE TOTAL

Erik Maurten Firdaus[a,*], Muhammad Faudzi Bahari[a]
[a]Universitas Muhammadiyah Kudus
Jalan Ganesha Raya No 1 Purwosari, Kudus, Indonesia
*Corresponding author: erikmaurteen@umkudus.ac.id

Info Artikel

DOI : https://doi.org/10.26751/jikoma.v6i1.2738

Article history:
Received February 08, 2025
Revised February 26, 2025
Accepted March 03, 2025

Kata kunci: DBSCAN, Ruang Alexandroff, Ruang topologi bertipe total.

Keywords: *Alexandroff space, DBSCAN, Total typed topological space.*

Abstrak

Density-Based Spatial Clustering of Applications With Noise (DBSCAN) adalah salah satu algoritma pengelompokan dalam ilmu data. Ada keterkaitan antara DBSCAN dengan ruang topologi bertipe yang berhingga. Ruang topologi bertipe dapat dengan mudah dikonstruksikan dari ruang topologi dan himpunan terurut parsial. Penulis menambahkan syarat yang lebih kuat pada definisi ruang topologi bertipe. Penulis mendefinisikan ruang topologi bertipe total. Dengan adanya syarat tersebut, ada contoh ruang topologi bertipe yang bukan ruang topologi bertipe total. Hal ini berakibat pada contoh ruang topologi bertipe total yang akan lebih sedikit jika dibandingkan dengan contoh ruang topologi bertipe. Penulis memaparkan sifat ruang topologi bertipe total yang diperoleh dari abstraksi contoh ruang topologi bertipe total. Dalam ruang topologi bertipe total $(X, \tau, \langle P, \leq \rangle, \{\sigma_x | x \in X\})$, jika (X, τ) adalah ruang Alexandroff, maka himpunan terurut parsial $\langle P, \leq \rangle$ memiliki elemen terkecil. Sifat ini secara umum tidak dimiliki oleh ruang topologi bertipe.

Abstract

Density-Based Spatial Clustering of Applications With Noise (DBSCAN) is a clustering algorithm. There is a relationship between the DBSCAN algorithm and typed topological space. We can easily construct typed topological space from any topological space and partially ordered set. We added stronger conditions to the definition of typed topological space. We introduced a new concept called total typed topological space. The typed topological space has more examples than the total typed topological space. We used abstraction to study a property of total typed topological space. In a total typed topological space $(X, \tau, \langle P, \leq \rangle, \{\sigma_x | x \in X\})$, *if* (X, τ) *is an Alexandroff space, the partially orderet set* $\langle P, \leq \rangle$ *has a minimal element. In general, typed topological space does not have this property.*

I. PENDAHULUAN

Hu (2024) memperkenalkan konsep ruang topologi bertipe. Dalam ruang topologi bertipe, beberapa himpunan terbuka memiliki “tipe” (Hu, 2024). Ada keterkaitan antara algoritma *clustering* dengan ruang topologi bertipe. Salah satu algoritma *clustering* yaitu *Density-Based Spatial Clustering of Applications With Noise* (DBSCAN) dapat direpresentasikan dalam ruang topologi bertipe yang berhingga (Hu, 2024). Hal ini karena data yang akan dikelompokkan berdimensi hingga. Banyak artikel dan buku yang membahas tentang ruang topologi berhingga dan algoritma DBSCAN di antaranya (Barmak, 2011), (Raja et al., 2024), (Stong, 1966). Setiap ruang topologi yang berhingga merupakan ruang Alexandroff

pISSN 2746-4970, eISSN 2798-1592

(Divya et al., 2024). Ruang Alexandroff adalah ruang topologi dengan sifat irisan berhingga maupun tak berhingga himpunan-himpunan terbuka merupakan himpunan terbuka (Divya et al., 2024). Di ruang Alexandroff (X,τ) , untuk setiap titik anggota x , koleksi persekitaran x yaitu $\mathfrak{U}(x)=\{U\in\tau|x\in U\}$ memiliki elemen terkecil (Speer, 2007). Hal ini berarti ada $V\in\mathfrak{U}(x)$ sehingga untuk setiap $U\in\mathfrak{U}(x)$ berlaku $V\subseteq U$. Selanjutnya, di artikel ini, koleksi persekitaran x ditulis dengan $\mathfrak{U}(x)=\{U\in\tau|x\in U\}$.

Di artikel ini, penulis menambahkan syarat yang lebih kuat pada definisi ruang topologi bertipe. Jika syarat tersebut tidak diberikan, konstruksi ruang topologi bertipe menjadi terlalu mudah. Dari ruang topologi dan himpunan terurut parsial, selalu dapat dibentuk ruang topologi bertipe. Tujuan penelitian ini adalah mempelajari sifat ruang topologi bertipe yang diberi tambahan syarat tersebut.

II. METODE PENELITIAN

Penulis menunjukkan bahwa ruang topologi bertipe dapat dengan mudah dikonstruksikan dari sebarang ruang topologi dan himpunan terurut parsial. Dalam kajian teori matematika, konstruksi ruang topologi bertipe menjadi tidak terlalu menarik. Penulis menambahkan syarat yang lebih kuat pada definisi σ_x . Penulis mengubah σ_x yang semula fungsi parsial menjadi fungsi total surjektif. Dengan syarat yang lebih kuat tersebut, penulis mendefinisikan ruang topologi bertipe total. Dengan syarat yang lebih kuat, contoh ruang topologi bertipe total akan menjadi lebih sedikit jika dibanding ruang topologi bertipe. Hal ini berarti ada contoh ruang topologi bertipe yang bukan ruang topologi bertipe total. Penulis mencari contoh ruang topologi bertipe yang bukan ruang topologi total. Berdasarkan contoh yang dibuat, penulis membuat abstraksi sifat yang harus dipenuhi ruang topologi bertipe total tetapi secara umum tidak dipenuhi ruang topologi bertipe.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Tahun 2024, konsep ruang topologi bertipe diperkenalkan untuk pertama kalinya.

Definisi 3.1 (Hu, 2024)
Diberikan ruang topologi (X,τ), *himpunan terurut parsial* $\langle P,\leq\rangle$, *serta himpunan* $\mathfrak{U}(x)=\{O\in\tau|x\in O\}$ *untuk setiap* $x\in X$. *Jika untuk setiap* $x\in X$, *terdapat fungsi parsial* $\sigma_x:\mathfrak{U}(x)\to P$ *sehingga untuk setiap* $U,V\in domain\ definisi(\sigma_x)$ *jika* $U\subseteq V$ *berlaku* $\sigma_x(U)\leq\sigma_x(V)$, *maka pasangan* $(X,\tau,P,\leq,\{\sigma_x|x\in X\})$ *disebut ruang topologi bertipe.*

Berdasarkan definisi tersebut, jika diberikan ruang topologi (X,τ) dan himpunan terurut parsial $\langle P,\leq\rangle$, maka selalu dapat dibentuk ruang topologi bertipe. Hal ini karena untuk setiap $x\in X$, fungsi parsial σ_x hanya terdefinisi pada suatu himpunan bagian $\mathfrak{U}(x)$. Dapat dipilih himpunan $U,V\in\mathfrak{U}(x)$ dengan $U\subseteq V$. Selanjutnya didefinisikan $\sigma_x(U)=\sigma_x(V)=p$ untuk suatu $p\in P$. Dengan demikian, didapat ruang topologi bertipe $(X,\tau,P,\leq,\{\sigma_x|x\in X\})$.

Dalam kajian teori matematika, konstruksi ruang topologi bertipe menjadi tidak menarik. Penulis termotivasi untuk mengubah σ_x menjadi fungsi total yang surjektif. Ruang topologi bertipe $(X,\tau,P,\leq,\{\sigma_x|x\in X\})$ dengan untuk setiap $\in X$ berlaku σ_x fungsi surjektif pada $\mathfrak{U}(x)$ dinamakan ruang topologi bertipe total (*totally typed topological space*). Kata total diambil dari σ_x sebagai fungsi total.

Definisi 3.2
Diberikan ruang topologi (X,τ), *himpunan terurut parsial* $\langle P,\leq\rangle$, *serta himpunan* $\mathfrak{U}(x)=\{O\in\tau|x\in O\}$ *untuk setiap* $x\in X$. *Jika untuk setiap* $x\in X$, *terdapat fungsi surjektif* $\sigma_x:\mathfrak{U}(x)\to P$ *sehingga untuk setiap* $U,V\in\mathfrak{U}(x)$ *jika* $U\subseteq V$ *berlaku* $\sigma_x(U)\leq\sigma_x(V)$, *maka* $(X,\tau,P,\leq,\{\sigma_x|x\in X\})$ *disebut ruang topologi bertipe total. Jika* $\sigma_x(U)=p$, *maka* U *dikatakan bertipe total* p.

pISSN 2746-4970, eISSN 2798-1592

Di matematika, jika definisi sudah dibangun, perlu disajikan contoh-contoh yang memenuhi definisi dan yang tidak memenuhi definisi. Pada Contoh 3.1, diberikan contoh ruang topologi berhingga yang dapat dikonstruksikan menjadi ruang topologi bertipe total.

Contoh 3.1

Diberikan ruang topologi diskret $(\{1,2\},\tau)$ dan himpunan terurut parsial $\langle\{a,b\},\leq\rangle$ dengan relasi $\leq\ =\ \{(a,a),(b,b),(a,b)\}$. Untuk mempersingkat penulisan himpunan $\{1,2\}$ ditulis dengan A dan himpunan $\{a,b\}$ ditulis dengan B.

Didefinisikan fungsi $\sigma_1 : \mathfrak{U}(1) \to \{a,b\}$ dengan $\sigma_1(\{1\}) = a$ dan $\sigma_1(\{1,2\}) = b$. Untuk $\{1\} \subseteq \{1,2\}$ berlaku $\sigma_1(\{1\}) \leq \sigma_1(\{1,2\})$. Dalam hal ini $\{1\}$ bertipe total a dan $\{1,2\}$ bertipe total b.

Didefinisikan pula fungsi $\sigma_2 : \mathfrak{U}(2) \to \{a,b\}$ dengan $\sigma_2(\{2\}) = a$ dan $\sigma_2(\{1,2\}) = b$. Untuk $\{2\} \subseteq \{1,2\}$ berlaku $\sigma_2(\{2\}) \leq \sigma_2(\{1,2\})$. Pasangan $(A,\tau,\langle B,\leq\rangle,\{\sigma_x | x \in A\})$ merupakan contoh ruang topologi bertipe total.

Selain ruang topologi berhingga, ada pula ruang topologi tak berhingga yang dapat dikonstruksikan menjadi ruang topologi bertipe total.

Contoh 3.2

Diketahui $((3,4],\tau_A)$ ruang bagian ruang topologi biasa $(\mathbb{R},\tau)$ dan $\langle\{4\},\leq\rangle$ himpunan terurut parsial dengan $\leq$ urutan biasa pada $\mathbb{Z}$. Untuk setiap $x \in (3,4]$, didefinisikan fungsi $\sigma_x : \mathfrak{U}(x) \to \{4\}$ dengan rumus untuk $U \in \mathfrak{U}(x)$ berlaku $\sigma_x(U) = \lceil \sup U \rceil$. Untuk setiap $U \in \mathfrak{U}(x)$, himpunan $U \neq \emptyset$ dan terbatas ke atas sehingga $\sup U$ ada. Sementara itu, $\sup U$ lebih besar dari 3 dan tidak mungkin melebihi 4. Akibatnya nilai $\lceil \sup U \rceil = 4$. Hal ini menjadikan $((3,4],\tau_A,\langle\{4\},\leq\rangle,\{\sigma_x | x \in X\})$ contoh ruang topologi bertipe total.

Jika $\sigma_x : \mathfrak{U}(x) \to P$ adalah fungsi surjektif, maka kardinalitas $\mathfrak{U}(x)$ yaitu $|\mathfrak{U}(x)|$ harus lebih besar sama dengan $|P|$. Hal ini memberikan inspirasi dalam membuat contoh yang bukan ruang topologi bertipe total.

Contoh 3.3

Diberikan ruang topologi $(\{0,1\},\tau)$ dengan $\tau = \{\emptyset,\{1\},\{0,1\}\}$ dan himpunan terurut parsial $\langle\{2,3\},\leq\rangle$ dengan $\leq$ urutan biasa. Untuk mempersingkat penulisan, himpunan $\{0,1\}$ ditulis dengan C dan himpunan $\{2,3\}$ ditulis dengan D.

Didefinisikan fungsi $\sigma_1(\{1\}) = 2$ dan $\sigma_1(\{0,1\}) = 3$. Untuk fungsi σ_0, karena himpunan terbuka yang memuat 0 hanyalah C sementara kodomainnya D, maka σ_0 tidak surjektif. Karena σ_0 tidak surjektif, maka pasangan $(C,\tau,\langle D,\leq\rangle,\{\sigma_x | x \in C\})$ merupakan ruang topologi bertipe tapi bukan ruang topologi bertipe total.

Berdasarkan Definisi 3.2, setiap ruang topologi bertipe total adalah ruang topologi bertipe. Hal ini karena $\mathfrak{U}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x)$. Tidak semua ruang topologi bertipe merupakan ruang topologi bertipe total. Hu (2024) menyatakan bahwa setiap ruang topologi yang memenuhi aksioma keterhitungan pertama merupakan ruang topologi bertipe. Sementara itu, ada contoh ruang topologi yang memenuhi aksioma keterhitungan pertama tetapi bukan ruang topologi bertipe total.

Contoh 3.4

Dibentuk $G = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ yang dilengkapi dengan topologi diskret τ. Karena setiap ruang topologi diskret merupakan ruang topologi yang memenuhi aksioma keterhitungan pertama, maka (G,τ) merupakan ruang topologi yang memenuhi aksioma keterhitungan pertama. Diberikan relasi urutan biasa $\leq$ pada himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Didefinisikan fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dengan

$$f(n) = \begin{cases} k, & n = 2k \\ -k, & n = 2k+1 \end{cases}$$

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ merupakan fungsi injektif. Diambil sebarang $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ dengan $f(n_1) = f(n_2)$. Jika $f(n_1) = f(n_2) = k_1$

pISSN 2746-4970, eISSN 2798-1592

untuk suatu k_1 bilangan bulat, maka $n_1 = n_2 = 2k_1$. Jika $f(n_1) = f(n_2) = -k_1$ untuk suatu k_1 bilangan bulat maka $n_1 = n_2 = 2k_1 + 1$. Diperoleh fungsi f injektif.

Didefinisikan relasi urutan $\leq'$ pada $\mathbb{N}$ dengan $m \leq' n$ jika hanya jika $f(m) \leq f(n)$. Relasi urutan $\leq'$ pada $\mathbb{N}$ bersifat refleksif karena $f(m) \leq f(m)$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$. Relasi urutan $\leq'$ bersifat transitif karena jika $m \leq' n$ dan $n \leq' r$, maka $f(m) \leq f(n)$ dan $f(n) \leq f(r)$. Berdasarkan sifat transitif relasi $\leq$ pada $\mathbb{Z}$, didapat $f(m) \leq f(r)$ atau $m \leq' r$. Relasi urutan $\leq'$ pada $\mathbb{N}$ bersifat antisimetris karena jika $m \leq' n$ dan $n \leq' m$, maka $f(m) \leq f(n)$ dan $f(n) \leq f(m)$. Berdasarkan sifat antisimetris relasi urutan $\leq$ pada $\mathbb{Z}$, didapat $f(m) = f(n)$. Karena f injektif, maka $m = n$. Didapat $\langle \mathbb{N}, \leq' \rangle$ himpunan terurut parsial.

Akan dibuktikan tidak ada elemen terkecil pada $\langle \mathbb{N}, \leq' \rangle$. Andaikan m elemen terkecil pada $\langle \mathbb{N}, \leq' \rangle$. Bilangan bulat $f(m)$ merupakan bilangan bulat negatif karena $f(3) = -1$ sementara $f(m) \leq f(3)$. Jika m genap dan $f(m)$ bilangan bulat negatif, maka $m = 2f(m) < 0$. Ini kontradiksi dengan m bilangan asli. Jika m ganjil, maka $m = -2f(m) + 1$. Karena $f(m) - 2 \in \mathbb{Z}$ dan $f(m) - 2 \leq f(m)$, maka $2\big(2 - f(m)\big) + 1 \leq' m$ dengan $2\big(2 - f(m)\big) + 1 \neq m$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian m elemen terkecil pada $\langle \mathbb{N}, \leq' \rangle$. Pernyataan yang benar adalah tidak ada elemen terkecil pada $\langle \mathbb{N}, \leq' \rangle$.

Akan dibuktikan untuk $x = 2 \in G$, tidak ada fungsi surjektif $\sigma_2 : \mathfrak{U}(2) \to \mathbb{N}$ yang mempertahankan urutan. Didefinisikan $V = \{2\}$. Untuk sebarang $U \in \mathfrak{U}(2)$ berlaku bahwa $V \subseteq U$. Andaikan benar bahwa untuk setiap $U \in \mathfrak{U}(2)$ berlaku $\sigma_2(V) \leq' \sigma_2(U)$. Karena σ_2 surjektif, maka $\langle \mathbb{N}, \leq' \rangle$ memiliki elemen terkecil. Hal ini kontradiksi dengan pernyataan $\langle \mathbb{N}, \leq' \rangle$ tidak memiliki elemen terkecil. Pernyataan yang benar adalah tidak ada fungsi $\sigma_2 : \mathfrak{U}(2) \to \mathbb{N}$ yang mempertahankan urutan. Pasangan $(G, \tau, \langle \mathbb{N}, \leq' \rangle, \{\sigma_x | x \in X\})$ bukan ruang topologi bertipe total.

Contoh 3.4 memberikan inspirasi kepada penulis bahwa ada sifat tertentu yang harus dimiliki oleh ruang topologi bertipe total, tetapi secara umum tidak dimiliki oleh ruang topologi bertipe. Inti dari ruang topologi (G, τ) pada Contoh 3.4 adalah setiap persekitaran x memiliki elemen terkecil (Ruang Alexandroff), kemudian jika $\langle P, \leq \rangle$ tidak memiliki elemen terkecil, maka ruang topologi bertipe yang terbentuk bukanlah ruang topologi bertipe total. Jika sifat ruang topologi pada Contoh 3.4 diabstraksikan, maka diperoleh teorema berikut.

Teorema 3.2
Diketahui $(X, \tau, \langle P, \leq \rangle, \{\sigma_x | x \in X\})$ ruang topologi bertipe total. Jika (X, τ) ruang topologi Alexandroff, maka $\langle P, \leq \rangle$ memiliki elemen terkecil.

Bukti
Andaikan $\langle P, \leq \rangle$ tidak memiliki elemen terkecil. Karena (X, τ) adalah ruang topologi Alexandroff, maka untuk setiap $x \in X$ berlaku bahwa $\langle \mathfrak{U}(x), \subseteq \rangle$ memiliki elemen terkecil. Untuk $x_1 \in X$, didefinisikan U elemen terkecil $\langle \mathfrak{U}(x_1), \subseteq \rangle$. Untuk sebarang $V \in \mathfrak{U}(x_1)$ berlaku bahwa $U \subseteq V$. Andaikan benar bahwa $\sigma_{x_1}(U) \leq' \sigma_{x_1}(V)$ untuk sebarang $V \in \mathfrak{U}(x_1)$. Didapat $\langle P, \leq \rangle$ memiliki elemen terkecil. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian $\langle P, \leq \rangle$ tidak memiliki elemen terkecil. Pengandaian harus diingkar. Himpunan terurut parsial $\langle P, \leq \rangle$ memiliki elemen terkecil.

IV. KESIMPULAN

Ruang topologi bertipe selalu dapat dikonstruksi dari ruang topologi dan himpunan terurut parsial. Ruang topologi bertipe total didapat dengan cara mengubah definisi σ_x pada ruang topologi bertipe yang semula berupa fungsi parsial menjadi fungsi total yang surjektif. Setiap ruang topologi bertipe total merupakan ruang topologi bertipe. Kebalikannya belum tentu berlaku. Contoh 3.4 menunjukkan bahwa ada contoh ruang topologi bertipe yang bukan ruang topologi bertipe total. Jika σ_x berupa fungsi total surjektif, maka ada sifat yang harus

pISSN 2746-4970, eISSN 2798-1592

dipenuhi pada ruang topologi bertipel total, tetapi secara umum tidak dipenuhi ruang topologi bertipe. Dalam ruang topologi bertipe total $(X, \tau, \langle P, \leq \rangle, \{\sigma_x | x \in X\})$, jika (X, τ) adalah ruang topologi Alexandroff, maka himpunan terurut parsial $\langle P, \leq \rangle$ memiliki elemen terkecil. Keterkaitan antara ruang topologi beripe total dengan algoritma pengelompokan (*clustering*) di dalam ilmu data merupakan topik menarik yang dapat dijadikan penelitian lanjutan.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Bu Ade Ima Afifa yang telah mendorong penulis untuk menyelesaikan artikel ini.

Semoga penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi perkembangan ilmu teori matematika dan teori ilmu data.

DAFTAR PUSTAKA

Barmak, J. A. (2011). *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*. Berlin: Springer-Verlag.

Divya, A., Ramya, K., & Sasikala, D. (2024). Necessary or sufficient condition for Alexandroff topological spaces to be cordial graphic. *Results in Control and Optimization*, *17*(June), 100467. https://doi.org/10.1016/j.rico.2024.100467

Hu, W. (2024). Typed topology and its application to data sets. *Topology and its Applications*, *342*, 108760. https://doi.org/10.1016/j.topol.2023.108760

Raja, M., Hasan, P., Mahmudunnobe, M., Saifuddin, M., & Hasan, S. N. (2024). Membership determination in open clusters using the DBSCAN Clustering Algorithm. *Astronomy and Computing*, *47*(February), 100826. https://doi.org/10.1016/j.ascom.2024.100826

Speer, T. (2007). *A Short Study of Alexandroff Spaces*. http://arxiv.org/abs/0708.2136 Diakses 6 Maret 2024

Stong, R. E. (1966). *Finite Topological Spaces* (hal. 325–340). Trans. Am. Math. Soc 123.

Model Peramalan Ekspor Minyak Dan Gas Indonesia Menggunakan Metode Dekomposisi *Trend Moment*