ANALSIS DINAMIK MODEL *PREDATOR-PREY* DENGAN PEMANENAN LINEAR PADA KEDUA POPULASI

M. Adib Jauhari Dwi Putra[a,*], Erik Maurten Firdaus[b], Findasari[c]
[abc]Universitas Muhammadiyah Kudus
Jl. Ganesha 1 Purwosari Kudus Indonesia
Email : adibjauhari@umkudus.ac.id

Abstrak

Kami mempelajari model *predator-prey* Lotka Volterra dengan pemanenan linear pada *prey* dan *predator*. Kami menemukan adanya 3 titik kesetimbangan, yaitu titik kepunahan kedua spesies, titik kepunahan *predator* dan titik koeksistensi kedua spesies, *predator* dan *prey*. Kestabilan dan eksistensi dari ketiga titik tersebut tergantung dari nilai-nilai parameter pada model. Kami menemukan bahwa populasi kedua spesies dapat lestari apabila tingkat pertumbuhan pada *predator* lebih besar daripada tingkat kematian dan pemanenan pada *predator.* Pemanenan yang berlebihan menyebabkan kepunahan kedua spesies. Kami juga melakukan simulasi numerik dengan menggunakan bahasa pemrograman Python untuk melihat perilaku sistem secara grafis

Kata Kunci : *predator-prey,* pemanenan, Lotka-Volterra

Abstract

We studied the Lotka Volterra predator-prey model with linear harvesting of prey and predators. We found that there are 3 equilibrium points, namely the point of extinction of the two species, the point of extinction of predators and the point of coexistence of both species, predator and prey. The stability and existence of the three points depend on the parameter values in the model. We found that the populations of both species were sustainable if the growth rate of the predators was greater than the mortality and yield rates of the predators. Overharvesting led to the extinction of both species. We also perform numerical simulations using the Python programming language to see the system behavior graphically

Keywords : *predator-prey, permanent, Lotka-Volterra*

I. PENDAHULUAN

Salah satu topik yang paling banyak dipelajari di bidang matematika pemodelan adalah *predator-prey.* Model *predator-prey* adalah alat yang penting untuk mempelajari interaksi antar spesies di alam sehingga kita dapat membuat strategi konservasi yang optimal. Salah satu model yang banyak dipelajari yaitu model Lotka-Voltera yang pertama kali diusulkan oleh Lotka dan Voltera.(Braza, 2012) Berbagai macam model hasil modifikasi model tersebut telah banyak dipelajari. Di alam liar, salah satu faktor yang menyebabkan berkurangnya suatu spesies selain perburuan antar spesies hewan juga perburuan oleh manusia atau lebih dikenal dengan istilah pemanenan. Contohnya pada populasi ikan di lautan, manusia melakukan pemanenan terhadap ikan-ikan tertentu. Karena itu, untuk menjaga keberlangsungan kehidupan spesies hewan tersebut, dilakukan berbagai upaya. Salah satu upaya yang dilakukan yaitu dengan membuat model yang menggambarkan ekosistem alami, sehingga manusia bisa melakukan pemanenan secara optimal tanpa menyebabkan kepunahan spesies.

Kuang dan Barreta(1998) mempelajari model Lotka Volterra dengan fungsi respon Michelis-Menten, sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{axy}{x+y}$$
$$\frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{bx}{x+y}\right) \quad (1)$$

dimana x, y adalah kepadatan populasi *prey* dan *predator*. $a, b,$ dan d berturut-turut adalah tingkat pertumbuhan intrinstik *prey*, tingkat perburuan oleh *predator* dan tingkat kematian *predator*. Semua konstanta bernilai positif. Putra dan Ade (2021) memodifikasi model yang diusulkan oleh Collings (1997) dengan menambah fungsi respon akar kuadrat untuk menggambarkan perilaku bergerombol pada *prey*.

Xiao dan Cao (2007) memodifikasi model (1) dengan menambahkan faktor pemanenan linear pada *prey* sehingga model menjadi

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{axy}{x+y} - hx$$
$$\frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{bx}{x+y}\right) \quad (2)$$

dengan h adalah tingkat pemanenan. Pada risetnya ditemukan 3 titik kestabilan, yaitu titik kepunahan kedua spesies, titik kepunahan *predator* dan kestabilan titik intrinsik, dimana *predator* dan *prey* hidup berdampingan. Pada simulasi yang diberikan, terlihat bahwa kedua spesies bisa tetap eksis apabila tingkat pemanenan nol atau mendekati nol. Yunfei, dkk. (2019) mempelajari model (2) dengan mengganti faktor pemanenan menjadi nonlinear $\frac{hx}{h+x}$. Model nonlinear menjadikan sistem lebih rumit dan muncul berbagai fenomena pada sistem seperti *limit cycle*, bistabilitas, bifurkasi Hopf dan bifurkasi Bogdanov-Takens.

II. LANDASAN TEORI

Definisi 2.1 *Diberikan persamaan diferensial orde pertama,* $\frac{dy}{dt} = f(x)$. *Titik* $\bar{x}$ *disebut setimbang jika memenuhi* $f(\bar{x}) = 0$. (Boyce dan DiPrima, 2012)

Teorema 2.2 *Suatu sistem* $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$ *disebut stabil asimtotik jika dan hanya jika semua nilai eigen dari matriks A, yaitu* $\lambda_i(A)$ *mempunyai bagian real negative dan dinotasikan sebagai*

$$Re(\lambda_i(A)) < 0$$

(Suzyanna, 2013)

III. METODE PENELITIAN

Pada kehidupan nyata, tidak hanya populasi *prey* yang mengalami perburuan atau pemanenan tetapi juga populasi *predator*. Sehingga pada model yang kami dipelajari, kami menambahkan faktor pemanenan linear pada *predator* sehingga model (2) menjadi

$$\frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{axy}{y+x} - h_1 x$$
$$\frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{bx}{y+x}\right) - h_2 y \quad (3)$$

h_1 merupakan tingkat pemanenan pada *prey* dan h_2 adalah tingkat pemanenan pada *predator*. Langkah pertama dalam melakukan analisis kestabilan, kami mencari titik tetap yang mungkin eksis berdasarkan Definisi 2.1.

Selanjutnya dilakukan analisis dinamik dengan mencari matriks Jacobi model (3) dan mensubstitusikan setiap titik kesetimbangan ke dalam matriks Jacobi tersebut. Dengan mencari nilai eigen dari matriks Jacobi yang terbentuk, maka dapat dilihat kestabilan setiap titik kesetimbangan berdasarkan Teorema 2.2.

Kemudian, kami membuat simulasi model (3) dengan pemrograman Python untuk melihat perilaku model dengan berbagai parameter. Terakhir, kami menjelaskan hasil simulasi numerik dan memberi kesimpulan.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Analisis Kestabilan Titik Equilibrium

Berdasarkan Definisi 2.1, model (3) dalam keadaan setimbang jika $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$. Terdapat tiga titik kesetimbangan, yaitu titik $E_0 = (0,0)$ atau kepunahan kedua populasi *prey* dan *predator*, $E_1 = (1-h_1, 0)$ yang merupakan titik kepunahan *predator*, dan $E_2 = (x^*, y^*)$ yaitu titik setimbang dimana dua spesies, *predator* dan *prey*, hidup berdampingan Titik E_1 eksis ketika $h_1 \neq 1$ dan titik E_2 eksis jika $b \neq 0$ dan $d + h_2 \neq 0$ dimana

$$x^* = \frac{ad - ab + ah_2 - h_1 b + b}{b}$$
$$y^* = -\frac{(b - d - h_2)(ab - ad - ah_2 + h_1 - b)}{b(d + h_2)}$$

Matrik Jacobian dari sistem (3) adalah

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1-2x-\frac{ay}{x+y}-\frac{axy}{(x+y)^2}-h_1 & -\frac{axy}{x+y}+\frac{axy}{(x+y)^2} \\ y\left(\frac{b}{x+y}-\frac{bx}{(x+y)^2}\right) & -d+\frac{bx}{x+y}-\frac{bxy}{(x+y)^2} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, berdasarkan Teorema 2.2, kestabilan titik E_0 dan E_1 dapat dianalisis dengan mencari nilai eigen matriks $J(E_0)$ dan $J(E_1)$. Sedangkan untuk kestabilan titik E_2 dapat disimpulkan dengan melihat syarat kestabilan titik E_0 dan E_1 yang tidak terpenuhi untuk keduanya.

1.1. *Kestabilan lokal titik kepunahan prey dan predator* (E_0)

Matriks Jacobian titik E_0 adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1-h_1 & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian tersebut, bisa dicari persamaan karakteristiknya dengan mencari $\det(\lambda I - J(E_0))$, yaitu

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-1+h_1 & 0 \\ 0 & \lambda+d \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-1+h_1)(\lambda+d) = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = 1-h_1$$
$$\lambda_2 = -d$$

Berdasarkan Teorema 2.2, titik E_0 stabil asimstotik jika $h_1 > 1$.

1.2. *Kestabilan lokal titik kepunahan predator* (E_1)

Matriks Jacobian untuk titik kepunahan *predator* E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -1+h_1 & -a \\ 0 & b-d-h_2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobian tersebut, bisa dicari persamaan karakteristiknya dengan mencari $\det(\lambda I - J(E_1))$, yaitu

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+1-h_1 & -a \\ 0 & \lambda-b+d+h_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda+1-h_1)(\lambda-b+d+h_2) = 0$$

Sehingga diperoleh

$$\lambda_1 = h_1-1$$
$$\lambda_2 = b-d-h_2$$

Berdasarkan Teorema 2.2, E_1 stabil asimtotik jika dan hanya jika $h_1 < 1$ dan $b-d-h_2 < 0$.

1.3. *Kestabilan lokal koeksistensi dua spesies prey dan predator* (E_3)

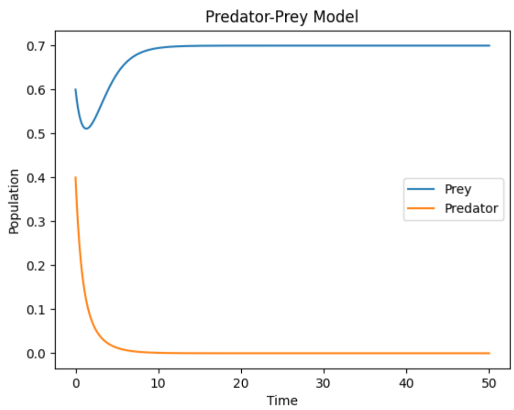
Titik E_3 stabil jika titik E_0 dan E_1 tidak stabil, yaitu ketika $b-d-h_2 > 0$.

B. Simulasi Numerik

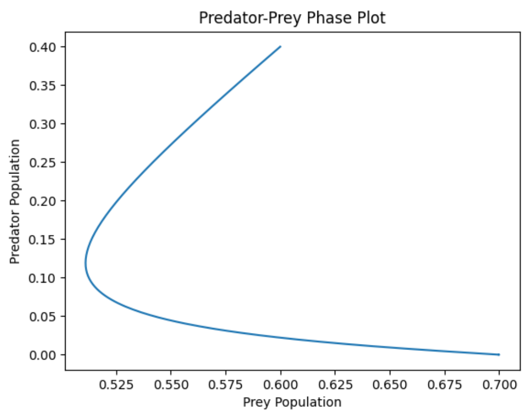
Pada bagian ini diberikan simulasi numerik sistem (3) dengan pemrograman Python untuk menunjukkan perilaku sistem dengan berbagai macam parameter.

1. Simulasi Kepunahan Kedua Spesies

   Pada simulasi ini digunakan parameter $a = 1, b = 2, d = 0.5, h_1 = 1.5$ dan $h_2 = 0.9$. dengan nilai awal $x_0 = 0.6$ dan $y_0 = 0.4$. Terlihat bahwa kedua spesies mengalami kepunahan karena adanya pemanenan yang terus menerus pada kedua spesies. Tingkat pemanenan terlalu besar sehingga populasi kedua spesies tidak memiliki waktu yang cukup untuk pulih.



Gambar 1. Predator Prey Model

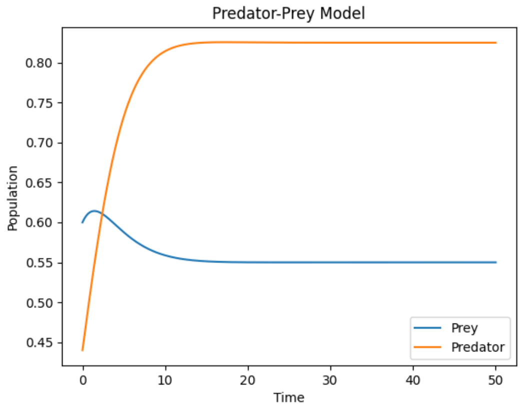


Gambar 2. Predator Prey Model

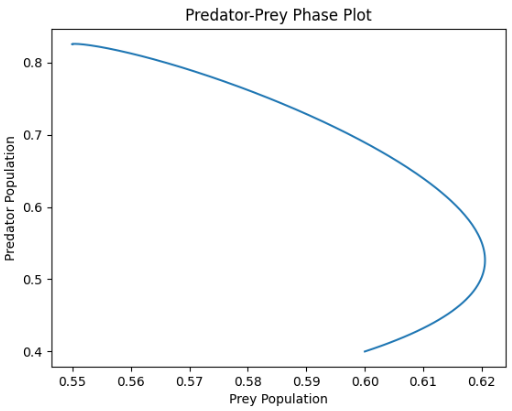
2. Simulasi Koeksistensi Dua Spesies

   Pada simulasi ketiga digunakan parameter $a = 0.5, b = 1, d = 0.3, h_1 =$

0.15 dan $h_2 = 0.1$ yang memenuhi syarat kestabilan titik E_2 dengan nilai awal yang sama dengan kedua simulasi sebelumnya. Terlihat bahwa ketika $b - d - h_2 > 0$, atau tingkat pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian dan pemanenan *predator*, maka kedua spesies mampu mempertahankan populasinya.



Gambar 3. Predator Prey Model Dua Spesies



Gambar 4. Predator- Prey Phase Plot Dua Spesies

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan model *predator prey* dengan pemanenan linear pada kedua spesies, dapat disimpulkan bahwa terdapat tiga titik kesetimbangan populasi. Pertama adalah titik kepunahan kedua spesies E_0 yang akan stabil jika tingkat pemanenan pada *prey* $h_1 > 0$. Artinya pemanenan berlebihan pada *prey* mengakibatkan rusaknya keseimbangan ekosistem karena berkurangnya makanan bagi *predator* yang menjadi sebab kepunahan *predator*. Titik kedua yaitu titik kepunahan *predator* yang stabil jika $h_1 < 1$ dan $b - d - h_2 < 0$. Dengan tingkat pemanenan pada *prey* kurang dari satu, populasi *predator* tetap akan mengalami kepunahan apabila tingkat pertumbuhan *predator* lebih kecil dari tingkat kematian dan tingkat pemanenan pada *predator*. Hal ini menggambarkan bahwa eksploitasi berlebihan pada *predator* juga mengakibatkan kepunahan pada spesies tersebut. Titik ketiga yaitu titik koeksistensi dua spesies. kedua spesies akan dapat mempertahankan populasinya sementara manusia tetap bisa melakukan pemanenan jika tingkat pertumbuhan *predator* b lebih besar daripada tingkat kematian dan pemanenan *predator*. Karena itu, diperlukan strategi agar pemanenan tidak mengakibatkan kerusakan ekosistem sehingga populasi *prey* dan *predator* tetap lestari. Saran untuk riset selanjutnya yaitu menganalisis bifurkasi yang mungkin muncul pada sistem.

DAFTAR PUSTAKA

Alligood, K. T., T. D. Sauer, J. A. Yorke. 2000. "CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems". Springer-Verlag. New York.

Boyce, William, R. Diprima.2012, "Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems", John Willey and Sons.USA

J. B. Collings, "The effects of the functional response on the bifurcation behavior of a mite predator-prey interaction model,"J. Math. Biol., vol. 36, no. 2, pp. 149–168, 1997, doi: 10.1007/s002850050095.

J.D. Murray, "Mathematical Biology", Springer Verlag, New York, 1989.

M. A. J. D. Putra, A. I. A. Himayati, "Stability Analysis of Leslie-Gower Model with Herd Behavior on Prey", Inprime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 4, No. 1 (2022)

R. M. ,May.: "Stability and complexity in model ecosystems". Princeton, NJ: Princeton Univ. Press 1973

Y. Kuang, E. Beretta, "Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator–prey system", J. Math. Biol. 36 (1998) 389–406.

Yunfei Lv, Yongzhen Pei, Yong Wang, "Bifurcations and simulations of two predator–prey models with nonlinear harvesting". Chaos, Solitons & Fractals. Volume 120, 2019, hlm.158-170,

X. Min, J. Cao, "Hopf Bifurcation and Non-Hyperbolic Equilibrium in a Ratio-Dependent Predator-prey Model with Linear Harvesting Rate: Analysis and Computation", Mathematical and Computer Modelling, Volume 50, Issues 3-4, 2009, hlm. 360-379